

TER
Circle Packing

BODIN Pierre

15 mai 2019

Empilement de cercles

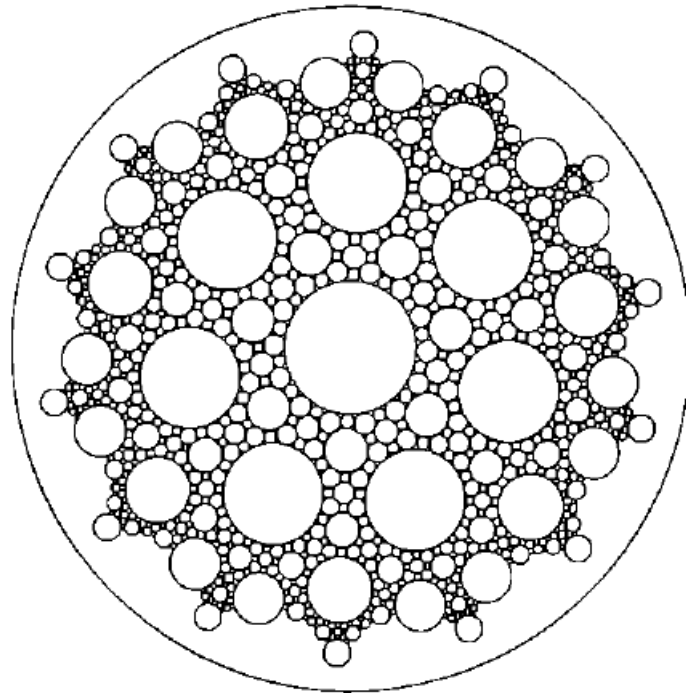


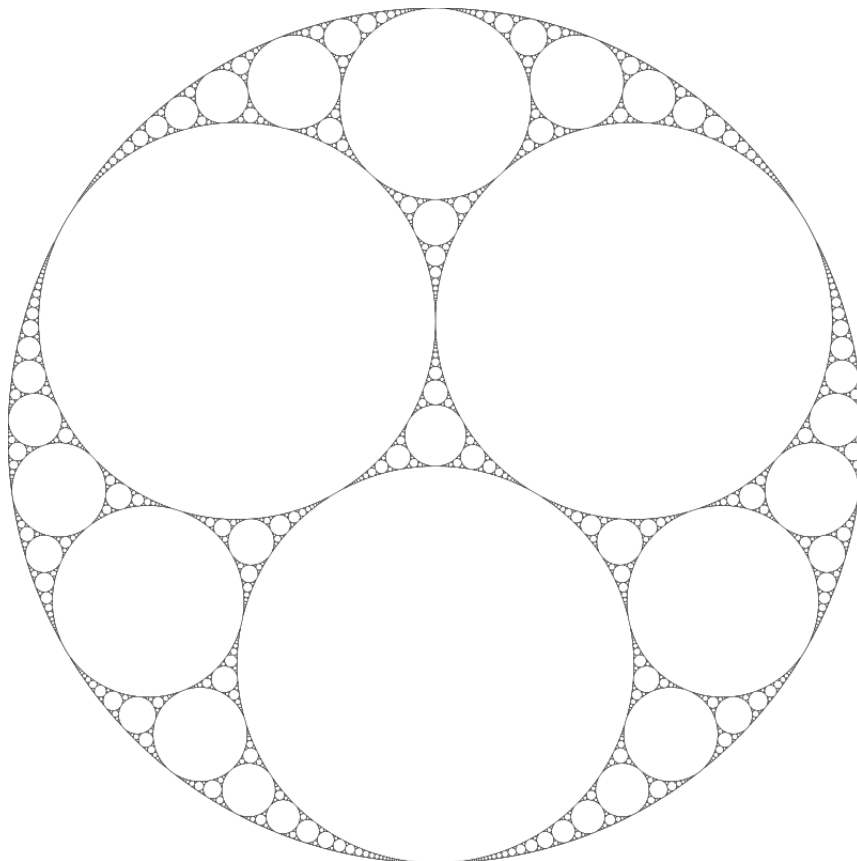
Table des matières

1	Introduction et approche intuitive	3
1.1	Introduction	3
1.2	Approche intuitive	4
2	Éléments de géométrie	8
2.1	Surfaces	8
2.2	Triangulations	9
2.3	Homotopies discrètes	10
2.4	Géométries classiques	11
2.5	Cercles et automorphismes	13
2.6	Surfaces de Riemann	14
3	Résultat fondamental	15
4	Outils de base et théorème de monodromie	15
4.1	Outils de base	15
4.2	Théorème de monodromie	16
5	Preuve dans le cas d'un disque fermé	18
5.1	Monotonie et Frontière	19
5.2	La preuve Hyperbolique	22
6	Preuve pour la Sphère Combinatoire	29
7	Ouverture vers la suite de la théorie et conclusion	30
7.1	Fonction analytique discrète et approximation	30
7.2	Conclusion	34

1 Introduction et approche intuitive

1.1 Introduction

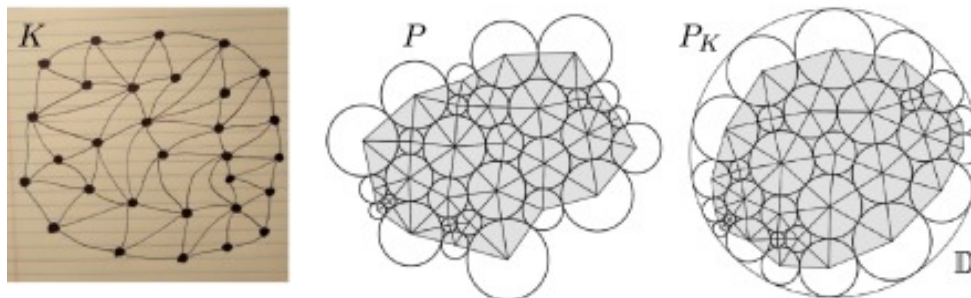
Depuis longtemps déjà les mathématiciens se sont intéressés à des configurations particulières de cercles tangents. C'est le cas par exemple des cercles d'Apollonius.



Mais ce n'est que récemment qu'un formalisme clair et une théorie se sont développés derrière ces objets appelés empilements de cercles. Le fait surprenant que cet écrit va s'efforcer de montrer, c'est que ce genre d'empilements, même en se fixant des contraintes plutôt arbitraires, existe presque toujours ! Ce résultat trouve sa genèse dans les idées de William Thurston, E. M. Andreev et Paul Koebe.

Ces empilements de cercles vont offrir un pont entre un monde géométrique discret et le théorème de l'application conforme de Riemann publié en 1851. Plusieurs décennies après cette annonce, le sujet a su montrer son importance et sa fertilité et offre désormais un parallèle discret qui approxime le monde classique de la géométrie conforme.

Intuitivement, un empilement de cercles est une configuration de cercles respectant un motif spécifique de tangences, appelé *combinatoire*.

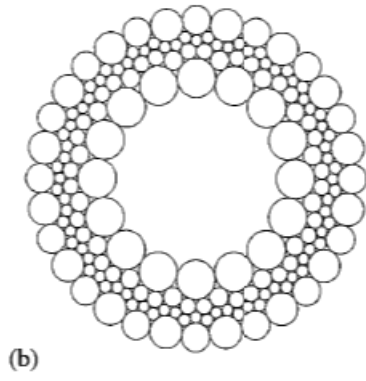
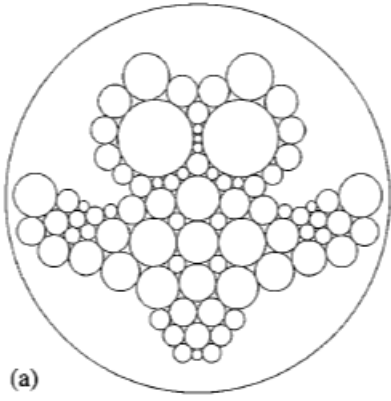
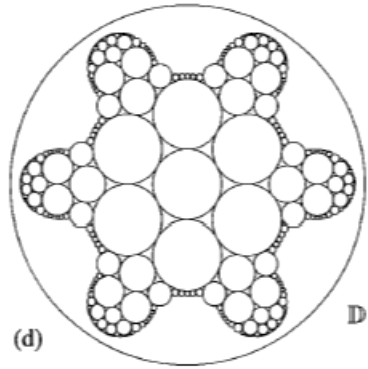
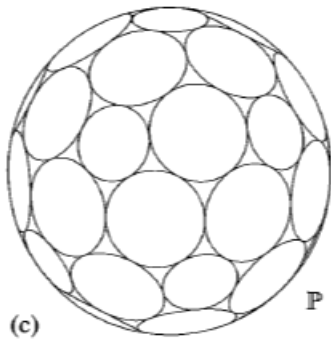
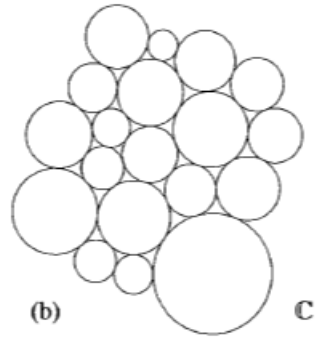
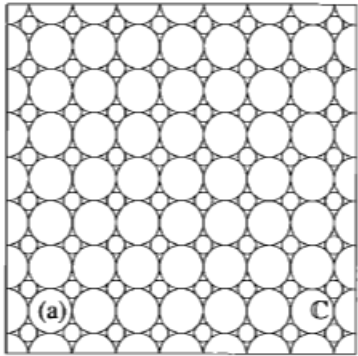


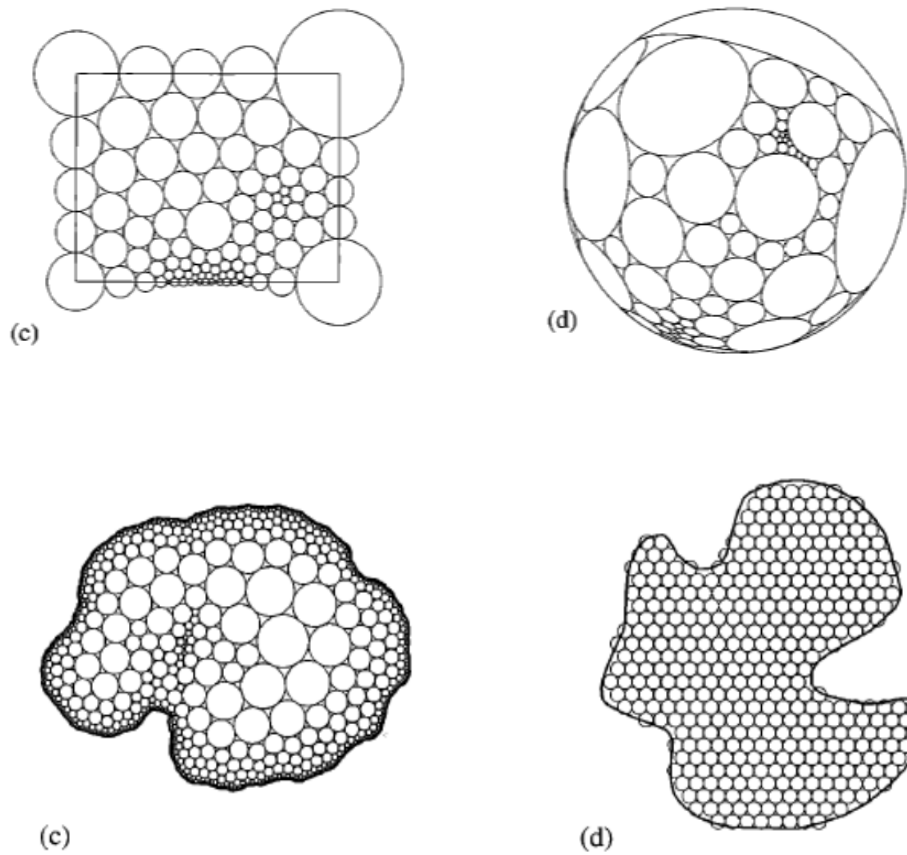
L'objet de cet écrit est de montrer l'existence et l'unicité d'empilements maximaux à partir d'éléments basiques de géométrie. Le résultat général peut être formulé ainsi, de manière simplifiée : étant donné n'importe quelle triangulation d'une surface, il existe un empilement de cercles extrémal et essentiellement unique dont la combinatoire correspond à cette triangulation. Les différents points seront clarifiés en temps voulu, comme par exemple la notion d'unicité. Et il faudra préciser dans quel espace géométrique vit cet empilement de cercles. Un point intéressant de ce résultat est que le motif encodant les tangences va forcer une géométrie particulière dans laquelle l'empilement existera.

La théorie des fonctions analytiques discrètes basée sur les empilements ne pourra pas être abordée ici mais servira d'ouverture pour montrer l'intérêt de cet objet.

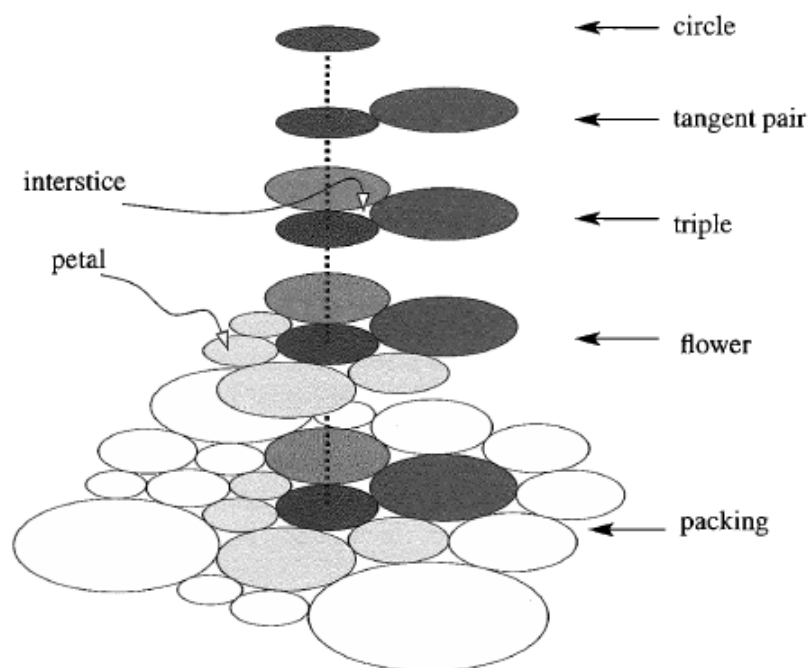
1.2 Approche intuitive

Avant de passer à une étude formelle, il peut être intéressant de développer une approche intuitive des empilements de cercles. On peut déjà noter que les cercles sont extérieurement tangents. Les illustrations de ce rapport proviennent du livre de Kenneth Stephenson *Introduction to Circle Packing : The Theory of Discrete Analytic Functions*. Celles ci-dessous permettent de voir la diversité qu'il peut exister, en fonction de la surface sur laquelle on se place, du fait que l'empilement soit fini ou non, que l'on autorise les recouvrements ou pas, etc.

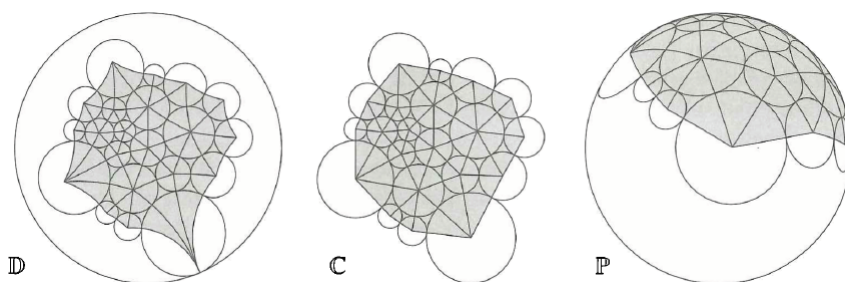




Une décomposition en différentes échelles permettra de les manipuler plus facilement. On fera souvent appel aux triplets de cercles et aux *fleurs*, composées d'un cercle central et d'un certain nombre de cercles voisins appelés *pétales*, formant une chaîne de cercles successivement tangents. On appellera *degré* d'un sommet le nombre de pétales, et le fait que chaque cercle admette une telle fleur est une condition de planéité locale que nous demanderons pour tous nos empilements. On peut distinguer les cercles totalement entourés par leur fleur, dits *intérieurs* au motif, et les autres avec des fleurs qui ne se referment pas, dits *cercles à la frontière*. Enfin un empilement peut être vu comme un entrelacement de telles fleurs.



Le thème de cet écrit est le suivant : étant donné un motif combinatoire, que peut-on dire de l'existence, de l'unicité et de la variété d'empilements de cercles ayant cette combinatoire ? Le travail inverse est bien sûr possible. A partir d'un empilement, en connectant les centres des cercles tangents par des géodésiques on obtient une réalisation géométrique de la combinatoire abstraite associée à l'empilement. On appelle cette réalisation *carrier*. Bien sûr il dépend de la géométrie dans laquelle est plongé l'empilement.



Bien qu'à première vue statiques, les empilements de cercles doivent être perçus comme dynamiques : comment réagit un empilement si les rayons à la frontière sont modifiés ? Si on autorise les recouvrements ? Comment interagissent la géométrie et la combinatoire ?

2 Éléments de géométrie

Il est temps maintenant d'introduire les éléments de géométrie de base, de topologie et de combinatoire indispensables pour notre étude. Nous allons passer un certain temps à détailler les choses. Certains passages ne sont pas indispensables pour la suite mais permettent de prendre pleinement conscience des outils en jeu.

2.1 Surfaces

Premièrement, ce que nous appellerons surfaces seront des 2-variétés topologiques connexes. On va aussi introduire plusieurs objets que l'on rencontrera par la suite.

Définition 1 Soit S un espace topologique. On appelle **atlas** une collection $A = \{(U_j, \Psi_j) : j \in J\}$ où les U_j sont des ouverts qui recouvrent S et où les Ψ_j sont des homéomorphismes de U_j dans $\Psi_j(U)$ un ouvert de \mathbb{R}^2 . On impose également que $\forall i, j \in J$ tels que $U_i \cap U_j$ est non vide, la fonction de transition $\Psi_j \circ \Psi_i^{-1} : \Psi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \Psi_j(U_i \cap U_j)$ est continue.

On appelle (U_j, Ψ_j) une **carte** et $\forall p \in U_j$, $z = \Psi_j(p)$ est appelé **coordonnées** de p dans cette carte.

Définition 2 On appelle **surface** un espace topologique S muni d'un atlas.

Par convention, l'orientation positive dans \mathbb{R}^2 correspond à une rotation anti-horaire. Si les fonctions de transitions d'un atlas associé à une surface S conservent l'orientation, alors on peut transposer l'orientation de \mathbb{R}^2 à S et on dit alors que S est une **surface orientée**. Dans ce qui suit, toutes les surfaces considérées seront orientées.

On introduit également les notions de surface simplement connexe, de disque et de sphère topologique et de surface à bord :

Définition 3 On appelle **chemin** une application $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$ continue. On parle de **lacet** si $\gamma(0) = \gamma(1)$. On dit qu'une surface S (connexe) est **simplement connexe** si tout lacet est homotope à un point.

Définition 4 Un **disque topologique ouvert** (resp. **fermé**) est un espace topologique homéomorphe à un disque ouvert (resp. fermé) dans \mathbb{R}^2 . De manière similaire, une **sphère topologique** est un espace topologique homéomorphe à une sphère dans \mathbb{R}^3 .

Définition 5 Une **surface à bord** est définie de la même manière qu'une surface à la différence que les $\Psi(U)$ (de l'atlas) sont soit des ouverts de \mathbb{R}^2 , soit l'intersection d'un ouvert de \mathbb{R}^2 avec le demi-plan supérieur fermé. On peut donc faire la distinction entre **points intérieurs** et **points à la frontière**.

2.2 Triangulations

Une fois la notion de surface clairement définie, la triangulation de cette surface va nous intéresser pour encoder le motif de l'empilement de cercles que l'on va réaliser sur cette surface.

Définition 6 *Un triangle topologique est un disque topologique fermé qui possède trois points à la frontière distincts appelés sommets et qui séparent la frontière en trois arcs, appelés arrêtes.*

Définition 7 *Une triangulation d'une surface S est une décomposition localement finie de S en une collection de triangles topologiques $T = \{t_j\}$ de sorte que $\forall i, j, t_i \cap t_j$ est soit vide, soit un seul sommet, soit une seule arrête complète.*

(Localement fini signifie que tout point de S possède un voisinage qui intersecte un nombre fini de triangles de T . En revanche, T peut-être finie ou infinie).

Cette triangulation des surfaces fait naturellement émerger une structure combinatoire abstraite quand on s'intéresse uniquement à la façon dont les sommets sont reliés entre eux. On introduit donc la notion générale de complexe simplicial, qui sera la structure dans laquelle seront encodées les contraintes de nos empilements de cercles.

Définition 8 *Un complexe simplicial abstrait est la donnée d'un ensemble V (dont les éléments sont appelés sommets) et d'un ensemble Σ de parties finies non vides (les faces) de V qui soit stable par sous-parties non vides : $\forall X \in \Sigma, \forall Y \subset X, Y \in \Sigma$ On impose également que tout sommet appartienne à un nombre fini non nul de faces.*

Les faces de cardinal 2 sont aussi appelées arêtes en référence au vocabulaire de la théorie des graphes. Par analogie, pour tout entier n , une face de dimension n (dite aussi n -face) est une face de cardinal $n + 1$.

Si la dimension des faces est bornée, la dimension d'un complexe simplicial est la dimension maximale des faces. On parle alors de n -complexe simplicial.

La **combinatoire** d'une triangulation fait référence aux relations abstraites entre ses éléments et peut être encodé dans un 2-complexe simplicial. Parfois il sera intéressant de construire une surfaces à partir d'un 2-complexe simplicial.

Lemme 1 *Les conditions suivantes sont nécessaires et suffisantes pour qu'un 2-complexe L représente une triangulation T d'une surface orientée S :*

1. *L est connexe : \forall sommets $u, v \in L, \exists \{w_1, w_2\}, \{w_2, w_3\}, \dots, \{w_{k-2}, w_{k-1}\}, \{w_{k-1}, w_k\}$ une famille finie d'arêtes telles que $u = w_1$ et $v = w_k$.*
2. *Toute arête de L appartient à une ou deux faces (appelée arête à la frontière ou arête intérieure).*
3. *Chaque sommet v de L appartient à un nombre fini de faces, et celles-ci forment une chaîne ordonnée de sorte chaque face partage une arête partant de v avec la suivante.*
4. *Chaque sommet de L appartient soit à aucune arête à la frontière, soit à exactement deux arêtes à la frontière. (On parle alors de sommet intérieur ou de sommet à la frontière).*
5. *Deux faces sont soit disjointes, soit elles partagent un unique sommet, soit elles partagent une unique arête.*
6. *Un ordre (u, v, w) peut être assigné aux sommets de chacune des faces de L de sorte que : si f_1 et f_2 sont des faces de L telles que $f_1 \cap f_2$ est l'arête $\{u, v\}$ d'orientation (u, v) dans f_1 , alors son orientation dans f_2 sera (v, u) .*

Dans le cas où L vérifie ces conditions, pour tout sommet v de L , l'ensemble des ses voisins (c'est à dire l'ensemble des sommets w tel que l'arête (v, w) est dans L) peut être ordonné en une liste v_1, \dots, v_k . C'est ce qu'on appelle une condition de planéité locale. $\{v; v_1, \dots, v_k\}$ sera alors appelé *fleur combinatoire* de v et l'entier k est le degré de v .

2.3 Homotopies discrètes

Cette partie prend le temps de détailler la notion d'homotopies discrètes, ceci est une manipulation qui s'avérera indispensable pour la démonstration du résultat.

Soit L un 2-complexe. On appelle **chaîne** de L une suite $\Gamma = \{f_0, f_1, \dots, f_n\}$ de faces (de dimension 2) où f_j possède une arête en commun avec son successeur f_{j+1} . On dit que la chaîne est fermée si $f_n = f_0$.

Soit $\Gamma = \{f_0, \dots, f_n\}$ une chaîne. On dit qu'une sous-chaîne $\gamma = \{f_j, \dots, f_k\}$ de Γ est locale au sommet v si v est un sommet de chacune des faces. Une nouvelle chaîne Γ' est obtenue par une *modification locale* si γ est remplacée dans Γ par n'importe quelle autre sous-chaîne locale à v ayant les mêmes premières et dernières faces que γ . On dit que Γ_1 et Γ_2 sont homotopes si on peut passer de l'une à l'autre par un nombre fini de modifications locales. (Comme la première et la dernière faces ne changent jamais, ce sont des homotopies à points fixes).

On retourne maintenant à des généralités sur la géométrie.

2.4 Géométries classiques

Comme cela a pu être sous-entendu précédemment, nous allons travailler avec les trois géométries standard en dimension 2 : sphérique, euclidienne et hyperbolique.

On travaillera avec les ensembles suivant :

$$\mathbf{P} = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbf{R}^3 = \mathbf{C} \cup \{\infty\} \text{ (Sphere de Riemann)}$$

$$\mathbf{R}^2 = \mathbf{C} = \{z = x + iy : x, y \in \mathbf{R}\} \text{ (Plan euclidien)}$$

$$\mathbf{D} = \{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} < 1\} = \{|z| < 1\} \text{ (Plan hyperbolique)}$$

Ces trois espaces sont munis d'une métrique au sens de Riemann. Mais comme ils vivent dans les espaces classiques à 2 ou 3 dimensions, cela revient simplement à avoir un élément de longueur ds que l'on peut intégrer le long d'une courbe suffisamment lisse. On peut ainsi définir la *longueur* d'une telle courbe, et la *distance* entre deux points a et b sera l'infimum des longueurs des chemins allant de a à b . On peut également définir la notion d'aire et d'angle.

On appelle *géodésique* une courbe qui minimise localement la distance. Elle est unique (sauf dans le cas de points antipodaux sur la sphère).

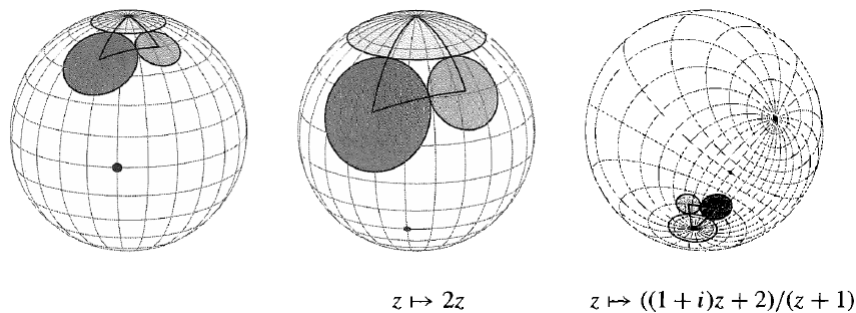
On peut également définir de manière classique un *cercle* de rayon $r > 0$ à partir d'un centre donné. Et les triangles (et autres polygones) sont ici définis en traçant des géodésiques entre les sommets. Ainsi, chaque géométrie possède une trigonométrie appropriée.

On va s'intéresser à la notion centrale d'*isométries*, qui sont des applications de notre espace dans lui-même et qui conservent les distances, les aires, les angles et l'orientation (par convention). Elles forment un groupe pour l'action de composition, noté $Isom(\mathbf{G})$ (où \mathbf{G} correspond à l'un des trois espaces). Un ensemble moins rigide est celui des *automorphismes conformes*, qui préservent les angles (et l'orientation). Ils forment un groupe, noté $Aut(\mathbf{G})$, qui contient celui des isométries. Ces deux groupes jouent un rôle clé dans la géométrie.

Voici les différents groupes associés à nos trois espaces :

$$\begin{aligned} Aut(\mathbf{C}) &= \{\sigma : \sigma(z) = az + b, a, b \in \mathbf{C}, a \neq 0\} \\ Isom(\mathbf{C}) &= \{\sigma : \sigma(z) = az + b, a, b \in \mathbf{C}, |a| = 1\} \end{aligned}$$

$Aut(\mathbf{P}) = \{\sigma : \sigma(z) = \frac{az+b}{cz+d}, a, b, c, d \in \mathbf{C}, ad - bc = 1\} \cong PSL(2, \mathbf{C})$
 C'est l'ensemble des *transformations de Möbius*. En voici quelques exemple :



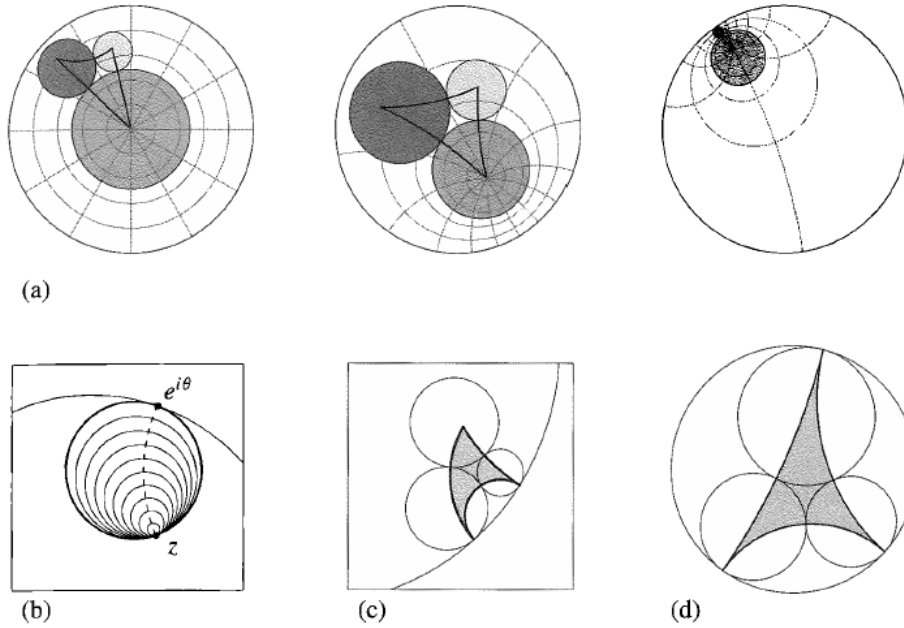
$$Isom(\mathbf{P}) \cong SO(3, \mathbf{R})$$

C'est une restriction du groupe spécial orthogonal de \mathbf{R}^3 à \mathbf{P} . Il correspond à l'ensemble des rotations autour d'un axe passant par l'origine et est représenté par des matrices 3×3 .

Dans le cas hyperbolique, tous les automorphismes sont aussi des isomorphismes :

$$Aut(\mathbf{D}) \equiv Isom(\mathbf{D}) = \{\Phi : \Phi(z) = \lambda \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}, |\lambda| = 1, z_0 \in \mathbf{D}\}$$

Le disque hyperbolique nécessite plus de détails, car il défie plus facilement notre intuition. Un résultat nous dit que les cercles hyperboliques dans \mathbf{D} sont aussi des cercles euclidiens. Les géodésiques hyperboliques de \mathbf{D} sont des arcs de cercles euclidiens orthogonaux au cercle unité. L'illustration suivante montre des géodésiques, des cercles, des triangles et l'effet d'automorphismes sur \mathbf{D} .



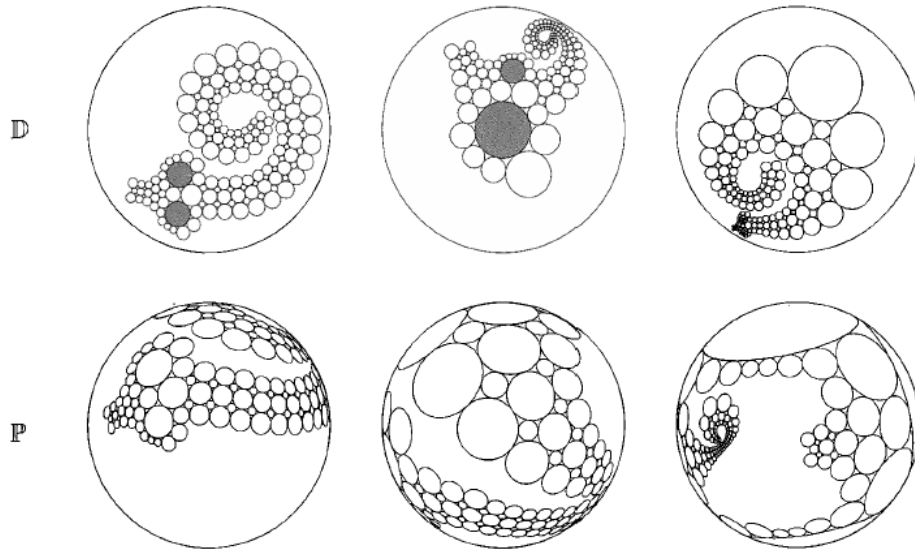
On autorise des cercles de rayons hyperboliques infinis. C'est ce qu'on appelle des *horocycles* et ce sont des cercles euclidiens intérieurement tangents au cercle unité. Le point tangent est le centre du cercle.

Les triangles ayant des sommets sur le cercle unité ont des angles nuls en ce point.

On peut aussi voir que le postulat d'Euclide sur les parallèles n'est pas respecté ici : étant donné une droite l et un point p hors de l , il existe une infinité de droites passant par p et parallèles à l .

2.5 Cercles et automorphismes

Ces trois modèles possèdent de nombreux avantages. Le disque hyperbolique \mathbf{D} est inclus dans le plan euclidien \mathbf{C} , lui-même inclu dans la sphère \mathbf{P} par projection stéréographique. De plus, un cercle dans une géométrie correspond toujours à un cercle dans l'autre. On peut donc passer d'un modèle à l'autre sans ambiguïté, bien qu'il faille rester prudent concernant les centres, les rayons et les géodésiques. Et notre chance continue quand on regarde les automorphismes : ce sont toutes des transformations de Möbius, $Aut(\mathbf{C})$ et $Aut(\mathbf{D})$ sont des sous-groupes de $Aut(\mathbf{P})$, et ces transformations envoient des cercles sur des cercles. Ainsi, les automorphismes envoient des empilements de cercles sur des empilements de cercles !



Enfin, tous ces groupes d'automorphismes $Aut(\mathbf{G})$ ($\mathbf{G} = \mathbf{P}, \mathbf{C}$ ou \mathbf{D}) sont doublements transitifs : pour tous points $p_1, p_2 \in \mathbf{G}$ et toutes directions β_1, β_2 , il existe un automorphisme $\sigma \in Aut(\mathbf{G})$ qui envoie p_1 sur p_2 tel que la droite de direction β_1 en p_1 est envoyée sur une droite de direction β_2 en p_2 . Cela nous permettra de manipuler aisément nos objets.

2.6 Surfaces de Riemann

Bien que nous n'ayons pas le temps de développer cet aspect ici, les empilements de cercles peuvent prendre place dans le cadre plus général des *surfaces de Riemann*.

Pour avoir une surface de Riemann, on demande, en plus, que les applications de transitions soient des fonctions analytiques.

Localement, ces espaces ressemblent à nos exemples \mathbf{P} , \mathbf{C} ou \mathbf{D} en fonction de la *métrique intrinsèque*. Tout point de la surface possède un voisinage isométriquement isomorphe à un ouvert de \mathbf{P} , \mathbf{C} ou \mathbf{D} respectivement. On parle alors d'espace sphérique, euclidien ou hyperbolique. C'est dans cette métrique intrinsèque que sont définis nos cercles sur la surface de Riemann.

3 Résultat fondamental

Il est enfin temps de passer aux empilements de cercles en eux même et d'exposer le premier résultat important les concernant. Comme nous l'avons vu précédemment, un empilement de cercles est une configuration de cercles associée à une contrainte de tangence encodée dans un complexe simplicial de dimension 2 correspondant à la triangulation d'une surface topologique orientable.

Définition 9 *Un empilement de cercles sur G , une surface orientée possédant une métrique, associé à un complexe K est la donnée d'une collection $P = \{C_v\}$ de cercles de G telle que :*

1. *A chaque cercle C_v dans P correspond un sommet v dans K*
2. *Deux cercles C_u et C_v sont tangents si et seulement si (u,v) est une arête de K*
3. *Trois cercles C_u, C_v et C_w forment un triplet orienté positivement si et seulement si (u,v,w) est un triplet orienté positivement de K .*

L'existence et l'unicité d'un tel empilement sur une surface font l'objet du théorème d'uniformisation discret.

Théorème 2 *Théorème d'uniformisation discret :*

Soit K un complexe qui triangularise une surface topologique S . Alors il existe une surface de Riemann S_K homéomorphe à S et un empilement de cercles P pour K dans la métrique intrinsèque de S_K , sphérique, euclidienne ou hyperbolique, telle que P est injectif et "remplit" S_K .

La surface de Riemann S_K est unique à transformation conforme près, et P est unique à automorphismes conformes de S_K près.

Un empilement de cercles est dit *injectif* si tous les cercles ont des intérieurs mutuellement disjoints.

4 Outils de base et théorème de monodromie

Pour montrer le théorème ci-dessus (dans ça version faible), nous allons nous aider du théorème de monodromie.

4.1 Outils de base

La construction d'un empilement de cercles va se concentrer sur la recherche de rayons adéquats, et de manière étonnante, les centres des cercles sont un point secondaire.

Définition 10 *Étant donné un complexe K avec des sommets $\{v_1, v_2, \dots\}$, un étiquetage R pour K , dans une géométrie particulière - sphérique, euclidienne ou hyperbolique - est un ensemble $R = \{r_1, r_2, \dots\}$ de nombres réels. On dit alors que K est un complexe étiqueté, noté $K(R)$ et on note $R(v)$ le réel associé au sommet v .*

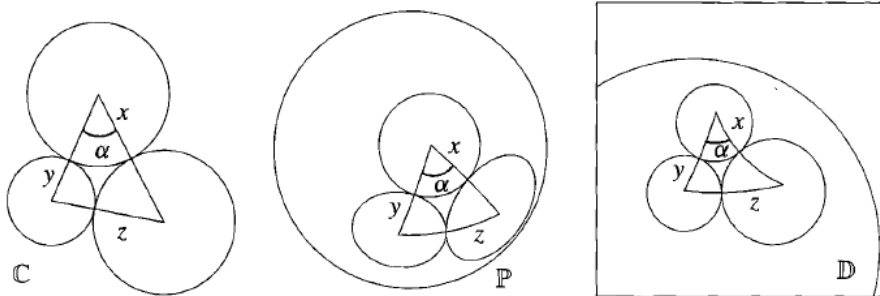
Attention, un complexe étiqueté ne fournit pas en général un empilement de cercles. C'est pourquoi on appellera les éléments de R des rayons seulement quand $K(R)$ peut être associé à un empilement de cercles.

On définit maintenant une fonction qui va nous aider à déterminer si localement $K(R)$ peut correspondre à un empilement de cercles.

Définition 11 *Soit R un étiquetage de K associé à une géométrie sphérique, euclidienne ou hyperbolique. Alors pour tout triplet de sommet (u, v, w) dans K on peut faire correspondre un triangle de **P**, **C** ou **D** de côtés $R(u) + R(v)$, $R(v) + R(w)$ et $R(w) + R(u)$. On pose alors la fonction $\alpha_R(u, v, w)$ qui renvoie l'angle en v dans ce triangle.*

La fonction **somme d'angles** $\theta_R : K(R) \rightarrow [0, \infty)$ associée à chaque sommet $v \in K(R)$ la somme des angles en v dans les faces de K contenant v :

$$\theta_R(v) = \sum_{(u,v,w)} \alpha_R(u, v, w)$$



Définition 12 *Un étiquetage R est un étiquetage d'empilement pour K si pour chaque sommet intérieur $v \in K$, il existe un entier positif β_v tel que $\theta_R(v) = 2\pi(\beta_v + 1)$. Si $\beta_v > 0$, on dit que v est un **point ramifié** de R (de degré β_v). Si R possède au moins un point ramifié, on dit que R est ramifié.*

4.2 Théorème de monodromie

Théorème 3 *Théorème de monodromie :*

*Soit K un complexe simplement connexe associé à un étiquetage R . Soit G une des surfaces suivantes : **P** la sphère, **C** le plan complexe ou **D** le disque hyperbolique, suivant la géométrie de R . Alors il existe un empilement de cercles P dans G associé à $K(R)$ si et seulement si R est un étiquetage d'empilement. P est unique aux isométries de G près.*

Démonstration : On commence par choisir un sommet $v_1 \in K$ et on place son cercle C_1 en un endroit arbitraire (mais défini) de G . On choisit ensuite un sommet v_2 adjacent à v_1 . On place le cercle C_2 de manière à ce que C_1 et C_2 soient tangents. Alors en prenant un troisième cercle C_3 tangent à C_1 et C_2 , il ne reste qu'une seule position pour le placer, car (C_1, C_2, C_3) doit avoir la même orientation que (v_1, v_2, v_3) dans K . On poursuit ainsi le procédé de proche en proche pour finalement placer tous les cercles associés à $K(R)$. Comme K est connexe, on est sûr de placer tous les cercles.

Il reste à montrer que le placement décrit précédemment est bien défini. C'est à dire que l'emplacement de chaque cercle ne dépend pas de l'ordre dans lequel les cercles sont placés, que le placement est unique une fois les deux premiers cercles posés. Enfin, il faut s'assurer que la configuration obtenue correspond bien à un empilement pour K .

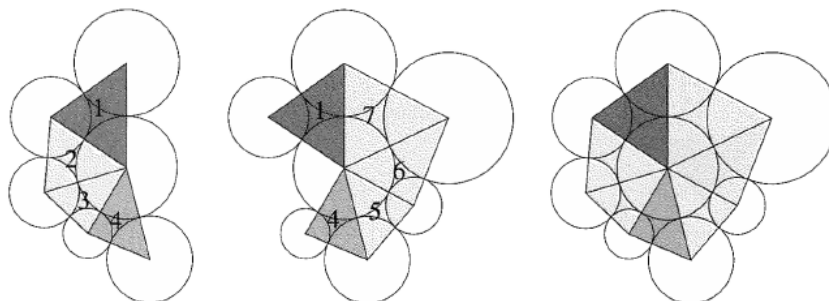
Plutôt que de travailler directement avec les cercles on va s'intéresser aux faces f de K . Toute face de K correspond à un triplet de cercles et donc étant donné une face f de K , on peut placer de manière unique une face adjacente f' car deux des cercles de f' sont placés et le troisième doit respecter le fait d'être tangent aux deux autres et le fait de posséder la bonne orientation.

On va donc déterminer une procédure sur les faces de K : soit $f_0 = (v_1, v_2, v_3)$ une face de "base". Une fois C_1 et C_2 placé, on place de manière unique C_3 et donc on a placé le triangle T_0 associé à f_0 . Si on considère maintenant une chaîne de faces $\Gamma = \{f_0, f_1, \dots, f_n\}$ où $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$, f_i et f_{i+1} possèdent une arête en commun, comme T_0 est placé, on peut placer T_1 associé à f_1 . En continuant ainsi, on finit par placer tous les triangles associé aux faces de Γ . On dit alors que T_n a été obtenu par développement le long de Γ .

Pour toute face f de K , on peut trouver une chaîne de faces reliant f_0 et f , et donc on peut placer toutes les faces de K . Il faut donc maintenant vérifier que l'emplacement d'une face ainsi posée ne dépend pas de la chaîne de faces choisie. On peut remarquer que deux chaînes Γ_1 et Γ_2 allant de f_0 à f vont conduire à un même placement de f si et seulement si parcourir Γ_1 dans le sens positif puis Γ_2 dans le sens négatif positionne T_0 à son emplacement d'origine. De cette manière il suffit de montrer que pour toute chaîne $\Gamma = \{f_0, f_1, \dots, f_n\}$ avec $f_n = f_0$, le triangle T_n obtenu par développement le long de Γ est identique à T_0 .

Pour cela on va travailler avec des homotopies. On va considérer la modification suivante, illustré plus bas : étant donné un sommet $v \in K$ et $\{f_1, \dots, f_m\}$ la chaîne contenant toutes les faces possédant v comme sommet, la condition sur notre étiquetage R nous dit que pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, les triangles positionnés par développement le long de $\Gamma_1 = \{f_1, \dots, f_i\}$ et de $\Gamma = \{f_1, f_m, f_{m-1}, \dots, f_i\}$ sont identiques. Cela vient du fait que $\theta_R(v)$ est un multiple de 2π . Comme toute homotopie entre deux chaînes s'exprime en terme de modification locale comme décrit si dessus, on conclut que le développement le long de deux chaînes fermées homotopes conduit à positionner

leur triangle final au même endroit.



Or la chaîne nulle $\Gamma_0 = \{f_0\}$ place de manière triviale T_0 à sa position d'origine. Et comme K est simplement connexe, toute chaîne fermée est homotope à Γ_0 . Ainsi, la procédure utilisée est bien définie et permet bien de placer chaque triangle (et donc chaque cercle) de manière unique.

On peut maintenant se demander si le résultat obtenu fournit bien un empilement de cercles. C'est bien le cas car pour le sommet v , une fois que l'on a une chaîne qui place l'une de ses faces, on peut l'étendre à toute la fleur de v et donc v respecte bien le motif de tangence imposé par K . Ceci termine la preuve de l'existence d'un empilement de cercles $P \longleftrightarrow K(R)$.

L'unicité se montre facilement. Une fois le premier triangle T_0 placé, la position des autres triangles est déterminée. Donc si l'on considère deux emplacements distincts de T_0 , il existe une isométrie passant de l'un à l'autre, et elle fait ainsi correspondre les deux empilements de cercle qui en découlent. \square

5 Preuve dans le cas d'un disque fermé

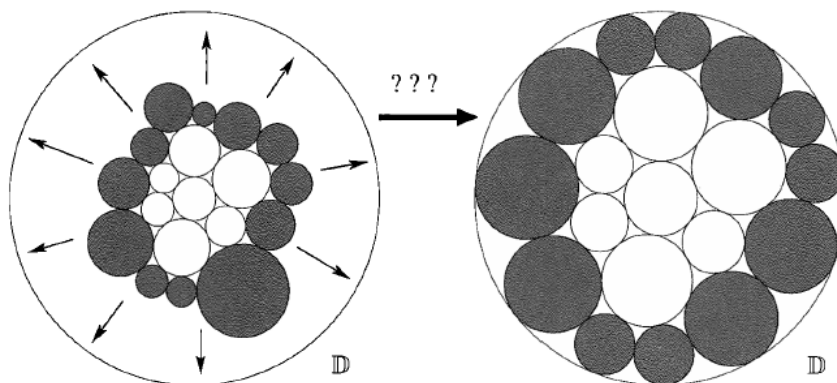
Proposition 4 *Soit K un disque combinatoire fermé, c'est à dire K simplement connexe, fini et avec une frontière non vide.*

Alors il existe un empilement de cercles injectif essentiellement unique $P_K \in \mathcal{D}$ dont chaque cercle du bord est un horocycle.

(Essentiellement unique signifie ici unique à automorphismes conformes près)

Le fait de passer par la géométrie hyperbolique va permettre de rendre les calculs plus simples. L'idée de la démonstration est la suivante : on va montrer que pour un complexe K , on peut placer un empilement associé non maximal dans le disque unité puis on va augmenter de manière progressive et adéquate le rayon des cercles jusqu'à converger vers un empilement dont

les cercles extérieurs sont des horocycles. D'un coté, les cercles extérieurs ont pour objectif premier d'augmenter leur rayon, tandis que le comportement des cercles intérieurs sera essentiellement centré sur l'objectif de conserver la contrainte de tangence encodé dans K .



5.1 Monotonie et Frontière

Pour commencer, on regarde le comportement de petites configurations de cercles, les triplets et les fleurs, lorsque un des cercles change de taille.

Lemme 5 *Monotonie dans les triangles :*

On considère un triplet de cercles tangents de rayons (r_1, r_2, r_3) dans D dont les centres forment un triangle T . On suppose r_1 fini.

Alors l'angle α de T dans le cercle de rayon r_1 est continu et strictement décroissant quand r_1 augmente, tandis que l'aire de T $aire(T)$ est continue et strictement croissante en r_1 .

Si de plus r_2 (respectivement r_3) est aussi fini, alors l'angle associé β (resp. γ) est continu et strictement croissant en r_1 .

Démonstration : On pose la fonction

$$g(x, y, z) = \arccos\left[\frac{(xy + 1)(xz + 1) - 2x(yz + 1)}{(xy - 1)(xz - 1)}\right]$$

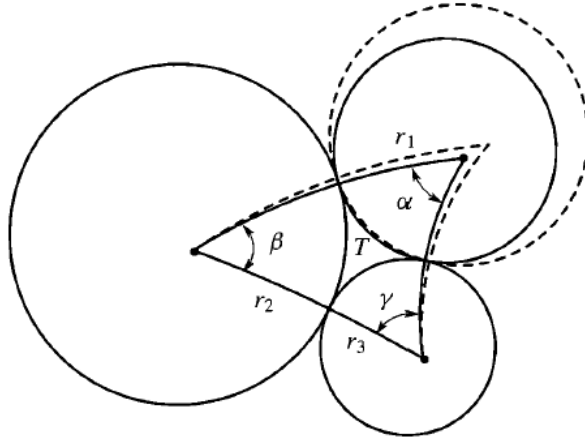
Si les rayons hyperboliques r_1, r_2, r_3 sont finis, alors $\alpha = g(x, y, z)$ avec $x = e^{2r_1}, y = e^{2r_2}, z = e^{2r_3}$. g est continue et le calcul des dérivées partielles donne :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) = \frac{-(x^2 yz - 1)\sqrt{(y - 1)(z - 1)}}{(xy - 1)(xz - 1)\sqrt{x(x - 1)(xyz - 1)}}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\sqrt{x(x - 1)(z - 1)}}{(xy - 1)\sqrt{(y - 1)(xyz - 1)}}$$

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\sqrt{x(x-1)(y-1)}}{(xy-1)\sqrt{(z-1)(xyz-1)}}$$

Premièrement, en supposant $x, y, z > 1$, la première équation est négative et les deux autres sont positives. α décroît strictement en x donc en r_1 , et croît strictement en y et z , donc en r_2 et r_3 .



D'autre part, en géométrie hyperbolique, $\text{aire}(\mathbf{T}) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$. Comme α décroît en r_1 tandis que β et γ croissent, l'évolution de l'aire n'est pas immédiatement claire car il y a un phénomène de compensation. Mais il est aisé de voir le résultat géométriquement : comme les angles β et γ croissent en r_1 , il est clair que le nouveau triangle contient strictement l'ancien. Ainsi l'aire augmente.

Dans le cas où r_2 et/ou r_3 est infini, un raisonnement similaire avec les formules adaptées conduit au résultat souhaité. \square

Un résultat de monotonie similaire dans les fleurs découle directement de ce résultat sur les triplets. En effet, la somme des angles d'une fleur est simplement la somme des angles centraux de chacune de ses faces. De même, l'aire d'une fleur $\text{aire}(\mathbf{F})$ est définie comme la somme des aires des faces la composant. Le résultat s'écrit de cette manière :

Lemme 6 *Monotonie dans les fleurs : Soit $\mathbf{F} = \{v; v_1, \dots, v_n\}$ une fleur combinatoire de sommet central v , soit $\{r, r_1, \dots, r_n\}$ un étiquetage hyperbolique pour \mathbf{F} , et soit $\theta(v)$ la somme des angles en v en fonction des r, r_1, \dots, r_n .*

Si $r < \infty$, $\theta(v)$ est continue et strictement décroissante en r , et est continue et strictement croissante en r_i pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ si r_i est fini.

Dans le cas où $r = \infty$, $\theta(v) \equiv 0$.

Aire(\mathbf{F}) est continue et strictement croissante en r et en r_i .

En considérant de nouveau la fonction g et $x = e^{r_1}$, on voit que

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x, y, z) = \pi, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x, y, z) = 0$$

Donc l'angle dans un triplet de cercles associé à un rayon r varie entre 0 et π . Cela implique que pour une fleur \mathbf{F} à n faces, la somme des angles varie entre 0 et $n\pi$ quand le rayon du cercle central varie. Si la fleur est fermée alors $n \geq 3$. Cette observation et le résultat sur la monotonie donnent le lemme suivant :

Lemme 7 *Soit $\mathbf{F} = \{v; v_1, \dots, v_n\}$ une fleur combinatoire fermée et $\{r_1, \dots, r_n\}$ l'étiquetage hyperbolique de ses pétales.*

Alors il existe une unique étiquette r pour le centre v telle que $\theta(v) = 2\pi$.

On conclut ces préliminaires géométriques avec un résultat sur les rayons de cercles intérieurs.

Lemme 8 *Soit $\mathbf{F} = \{v; v_1, \dots, v_n\}$ une fleur combinatoire fermée, $\{r; r_1, \dots, r_n\}$ un étiquetage hyperbolique associé et $\theta(v)$ la somme des angles de \mathbf{F} en v .*

On suppose $\theta(v) \geq 2\pi$. Alors $r \leq -\log(\sin(\pi/n))$.

Démonstration :

On voit facilement par monotonie que le cas extrême se produit quand les rayons des pétales sont tous infinis et que le rayon du cercle central est tel que $\theta = 2\pi$, comme illustré sur la figure ci-dessous.

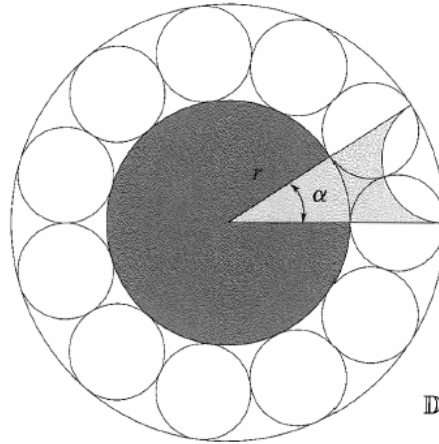
En effet, si θ est strictement supérieur à 2π , alors r pourrait être pris plus grand tout en vérifiant toujours les hypothèses. De la même manière, si un pétale avait un rayon fini, alors en le prenant plus grand, θ augmenterait, et donc on pourrait choisir r plus grand. En revanche, si le rayon central était plus grand, les pétales ne feraient plus le tour.

Dans cette situation extrême, tout les triplets ont un même angle commun α en v que l'on peut calculer en faisant tendre y et z vers l'infini dans la fonction g définie plus tôt : $\alpha = \arccos(1 - 2e^{-2r})$. Puisque $\alpha = \theta/n = 2\pi/n$, on a

$$\begin{aligned} \cos(2\pi/n) = 1 - 2e^{-2r} &\implies \frac{1 - \cos(2\pi/n)}{2} = e^{-2r} \\ \implies \sin^2(\pi/n) = e^{-2r} &\implies r = -\log(\sin(\pi/n)) \end{aligned}$$

□

On peut remarquer qu'il n'y a pas de borne analogue dans le cas euclidien puisque changer l'échelle pour rendre la fleur aussi grande que l'on veut ne changera pas la somme des angles. Cette borne et la possibilité d'avoir des cercles de rayon infini sont des avantages cruciaux de la géométrie hyperbolique.



5.2 La preuve Hyperbolique

La première étape de la démonstration repose sur le fait suivant :

Affirmation : La conclusion de la proposition 4 est vraie si il existe un empilement de cercles P associé à K dans \mathbf{D} .

Démonstration : Nous allons utiliser un argument classique : la méthode de *Perron*. On définit une collection d'étiquetages

$$\Phi = \{R : \theta_R(v) \geq 2\pi \text{ pour tout sommet intérieur } v\}$$

On montre que le supremum \hat{R} de Φ , défini par $\hat{R}(v) = \sup\{R(v) : R \in \Phi\}$, est la solution que l'on cherche, à savoir l'étiquetage d'empilement associé à l'empilement de cercle P_K que l'on cherche.

Les objets dans une classe de Perron comme Φ sont souvent appelés "sous-solutions", l'argument de Perron indique qu'il faut vérifier que : (1) Il existe une sous-solution (Φ n'est pas vide). (2) Φ est fermé pour le passage au maximum. (3) \hat{R} n'est pas dégénéré. (4) \hat{R} est une solution (et non pas juste une sous-solution).

(1) **Non vide :** Par hypothèse, il y a un empilement de cercles P associé à K dans \mathbf{D} ; ses rayons forment un étiquetage R_0 qui est dans Φ .

(2) **Fermeture par passage au maximum :** Soit $R_1, R_2 \in \Phi$, est ce que $R = \max(R_1, R_2)$ est dans Φ ? Soit v un sommet intérieur et supposons, sans perdre de généralité, que $R(v) = R_1(v)$. En comparant R à R_1 , on voit que les étiquettes des voisins de v ne peuvent qu'être plus grandes en passant de R_1 à R . Le résultat de monotonie dans les fleurs nous dit $\theta_R(v) \geq \theta_{R_1}(v) \geq 2\pi$. Ce raisonnement est vrai pour tout sommet intérieur v , donc R est dans Φ .

(3) **Non dégénéré :** Dans notre cas, on doit vérifier que \hat{R} est fini pour les sommets intérieurs. Soit v intérieur et n son degré. Pour tout $R \in \Phi$,

$\theta_R(v) \geq 2\pi$, donc par le lemme 8, $R(v) \leq -\log(\sin(\pi/n))$. Par conséquent, $\hat{R}(v) \leq -\log(\sin(\pi/n))$.

(4)**Solution** : Premièrement, pour tout étiquetage $R \in \Phi$ et pour tout sommet extérieur w , remplacer $R(w)$ par ∞ ne fera qu'augmenter la somme des angles pour les sommets intérieurs et donc l'étiquetage modifié sera toujours dans Φ . On en déduit que $\hat{R}(w) = \infty$ pour tout $w \in \partial K$.

La question centrale réside donc dans le fait de savoir si \hat{R} lui-même est dans Φ et si c'est un étiquetage d'empilement. Le fait que l'on considère des objets discrets va rendre la preuve beaucoup plus facile que dans le cas continu.

Pour tout entier $j \geq 0$ et pour tout sommet intérieur v , il existe $R_{j,v} \in \Phi$ tel que $[\hat{R}(v) - R_{j,v}] \leq 1/j$. Par (2), l'étiquetage R_j défini par $R_j = \max_v \{R_{j,v}\}$ est toujours dans Φ . Cela est vrai pour tout sommet v et par l'argument du dernier paragraphe, on peut aussi supposer que R_j a des étiquettes égales à l'infini pour ses sommets extérieurs. Ainsi, la suite $\{R_j\}$ vérifie

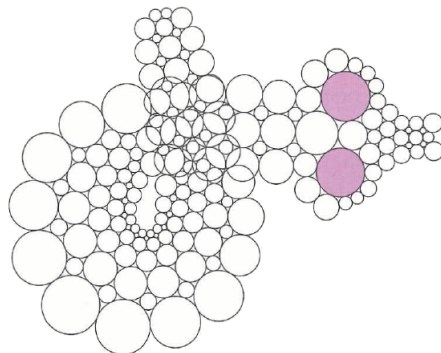
$$R_j(v) \rightarrow \hat{R}(v) \text{ quand } j \rightarrow \infty, \text{ pour tout sommet } v \in K$$

De plus, pour un sommet intérieur v , $\theta_R(v)$ est continue comme fonction des rayons de R , donc le résultat précédent implique que $\theta_{R_j}(v) \rightarrow \theta_{\hat{R}}(v)$, et donc que $\theta_{\hat{R}}(v) \geq 2\pi$. Cela est vrai pour tout sommet intérieur v , donc $\hat{R} \in \Phi$. De plus, si on suppose que $\theta_{\hat{R}}(v) > 2\pi$ pour un certain sommet intérieur v . Alors, de nouveau par continuité et monotonie, une petite augmentation de l'étiquette $\hat{R}(v)$ est possible sans que la somme des angles en v soit inférieure à 2π , et cette augmentation ne peut qu'augmenter la somme des angles des sommets voisins. On aurait donc un étiquetage dans Φ qui est plus grand que \hat{R} en v , ce qui contredit la définition de \hat{R} . On en déduit que $\theta_{\hat{R}}(v) = 2\pi$ pour tout sommet intérieur v , ce qui prouve que \hat{R} est un étiquetage d'empilement.

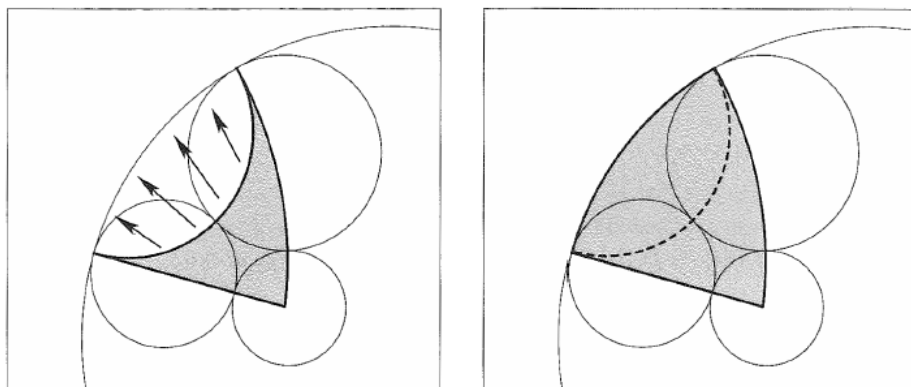
Ceci achève l'argument de Perron et nous avons trouvé un étiquetage d'empilement \hat{R} prometteur. On utilisera désormais la notation R_K pour s'y référer et nous allons maintenant étudier les propriétés de l'empilement de cercles associé, puis nous nous intéresserons à l'unicité.

Comme R_K est un étiquetage d'empilement, le théorème de monodromie donne l'existence d'un empilement de cercles P_K dans D associé à $\mathbf{K}(R_K)$, et ses cercles extérieurs, ayant des rayons infinis, seront des horocycles. Il ne nous reste donc plus qu'à montrer que P_K est injectif. On définit une application continue $\Phi : K \rightarrow \text{carr}(P)$ qui associe chaque face de K une à une aux triangles hyperboliques correspondants dans $\text{carr}(P)$. La fonction Φ est localement injective ; c'est immédiat pour les points intérieurs aux faces et arrêtes de K , et pour un sommet intérieur v la condition $\theta_R(v) = 2\pi$ nous dit que les faces de la fleur en v forment une chaîne fermée de triangles

ayant des intérieurs disjoints. Il est important de voir que cette condition en v ne garantit pas directement que les cercles ont des intérieurs mutuellement disjoints. La figure suivante montre un contre-exemple :



On modifie ensuite Φ sur les faces ayant une arête dans la frontière : l'image du triangle est déformé de manière continue de sorte que l'arête dans la frontière soit envoyée sur l'arc de cercle du disque unité formé par les centres (idéaux) des horocycles associés. Les détails précis de cette modification ne sont pas importants tant que Φ reste inchangée sur les autres arêtes et qu'elle fait correspondre de manière injective et continue les faces dans la nouvelle image dans $\overline{\mathbf{D}}$. (Il se peut que dans certains cas, certaines faces nécessitent des ajustements sur plusieurs arêtes de la frontière.)



En appelant toujours Φ cette fonction modifiée, on fait maintenant appel à la topologie. K est un disque topologique et pour toute suite (p_j) qui converge vers sa frontière ∂K , la suite image $(\Phi(p_j))$ converge dans $\partial \mathbf{D}$. Donc $\Phi : \mathbf{K} \rightarrow \overline{\mathbf{D}}$ est ce qu'on appelle une fonction propre. Ainsi, Φ est propre, continue et localement injective entre deux disques topologiques. Par un argument topologique, Φ est globalement injective. Puisque les cercles de P sont recouverts par l'image des faces de K on voit directement que les

cercles ont des intérieurs mutuellement disjoints. Ainsi $P_K \longleftrightarrow \mathbf{K}(R_K)$ est un empilement injectif.

On va maintenant prouver l'unicité de R_K : il n'existe pas d'autre étiquetage d'empilement qui fournit un empilement de cercles satisfaisant les conclusions de la proposition. (Bien sûr pour P_K , on a l'unicité uniquement aux automorphismes de \mathbf{D} près.) La preuve repose sur des considérations d'aires. Pour un complexe associé à un étiquetage et réalisé comme surface $\mathbf{K}(R)$, on notera $\text{Aire}(\cdot)$ pour l'aire dans la métrique induite par R . Comme chaque face de $K(R)$ est isométriquement isomorphe à un triangle hyperbolique, son aire est $\pi - \alpha - \beta - \gamma$. En ajoutant les aires de toutes les faces on a

$$\text{Aire}(\mathbf{K}(R)) = F\pi - \Sigma$$

où F est le nombre de faces de K et Σ est la somme de tous les angles de toutes les faces de $\mathbf{K}(R)$. En distinguant ces angles selon leurs sommets, intérieurs ou à la frontière, on peut écrire $\Sigma = \Sigma_{int} + \Sigma_{frt}$. On a donc maintenant

$$\text{Aire}(\mathbf{K}(R)) = F\pi - \Sigma_{int} - \Sigma_{frt}$$

Pour notre étiquetage R_K on a $\Sigma_{int} = 2\pi N$ avec N le nombre de sommets intérieurs de K , et $\Sigma_{frt} = 0$ car tous les cercles à la frontière sont des horocycles. Ainsi

$$\text{Aire}(\mathbf{K}(R_K)) = (F - 2N)\pi$$

On suppose que R' est un autre étiquetage d'empilement non ramifié pour K qui possède des rayons à la frontière infinis. $\mathbf{K}(R')$ aura alors la même aire. D'autre part comme R' est dans Φ , la définition de $R_K (= \hat{R})$ implique que $R' \leq R_K$ (dans le sens que cette inégalité est vraie pour tout sommet). Une inégalité stricte en un sommet v impliquerait par le lemme de monotonie dans les fleurs que $\text{Aire}(\mathbf{K}(R_K)) > \text{Aire}(\mathbf{K}(R'))$. Comme en réalité elles sont égales, on en déduit que $R'(v) = R_K(v)$ pour tout sommet intérieur v , et donc que $R' \equiv R_K$. Cela prouve l'unicité de R_K et donc l'unicité essentielle de P_K , ce qui achève la démonstration de l'affirmation. \square

On continue maintenant la suite de la démonstration de la proposition. Par l'affirmation, il suffit de prouver que pour un K donné on peut trouver un empilement de cercles (quelconques dans \mathbf{D}). On va procéder par récurrence sur le nombre V de sommets de K . Le cas minimal est $V = 3$; K est un simple triangle et P_K correspond clairement à un triplet d'horocycles mutuellement tangents.

On suppose que K est tel que $V > 3$ et que la proposition est vraie pour toute triangulation ayant moins de V sommets. Soit $w \in \partial K$ arbitraire. On considère les deux cas possibles :

Cas 1. On suppose qu'il existe une arête intérieure a partant de w et allant vers u un autre sommet de la frontière. Dans ce cas, on coupe K en deux parties via l'arête a . Plus formellement, il existe des complexes K_1 et K_2 ayant des arêtes à la frontière positivement orientées

$$e_1 = (w_1, u_1) \in K_1 \text{ et } e_2 = (u_2, w_2) \in K_2$$

telles que

$$K = K_1 \bigcup_{e_1 \sim e_2} K_2$$

Dans le sens K est l'intersection disjointe de K_1 et K_2 modulo les identifications

$$e_1 \longleftrightarrow e_2, \quad w_1 \longleftrightarrow w_2, \quad u_1 \longleftrightarrow u_2$$

Comme K triangularise un disque fermé, cela reste vrai pour K_1 et K_2 et chacun d'eux a au moins un sommet en moins que K .

En appliquant maintenant l'hypothèse de récurrence, il existe des empilements de cercles non ramifiés P_1 et P_2 pour K_1 et K_2 respectivement et tous leurs cercles à la frontière sont des horocycles. Il s'avère qu'on peut les "recoller" ensemble pour former un empilement de cercles pour K . Si on prend P_1 par exemple, les horocycles associés à $w = w_1$ et $u = u_1$ seront tangents donc une normalisation par un automorphisme de \mathbf{D} approprié permet de supposer que ces cercles sont précisément les cercles centrés sur l'axe des réels

$$c_w = \{|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}\}, \quad c_u = \{|z + \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}\}.$$

En considérant l'orientation de e_1 on voit que les cercles restant de P_1 seront au dessus de l'axe des réels. De manière similaire pour P_2 , on peut renormaliser de manière à ce que ces mêmes cercles soient les cercles correspondant à w_2 et u_2 respectivement. Mais cette fois l'orientation de e_2 implique que les autres cercles de P_2 seront en dessous de l'axe des réels. En superposant simplement ces deux configurations de cercles renormalisé on obtient un empilement de cercles hyperbolique non ramifié pour K . L'affirmation complète ainsi la récurrence pour ce premier cas.

Cas 2. On suppose que toutes les arêtes intérieures partant de w arrivent sur un sommet intérieur. La géométrie dans cette dernière partie peut

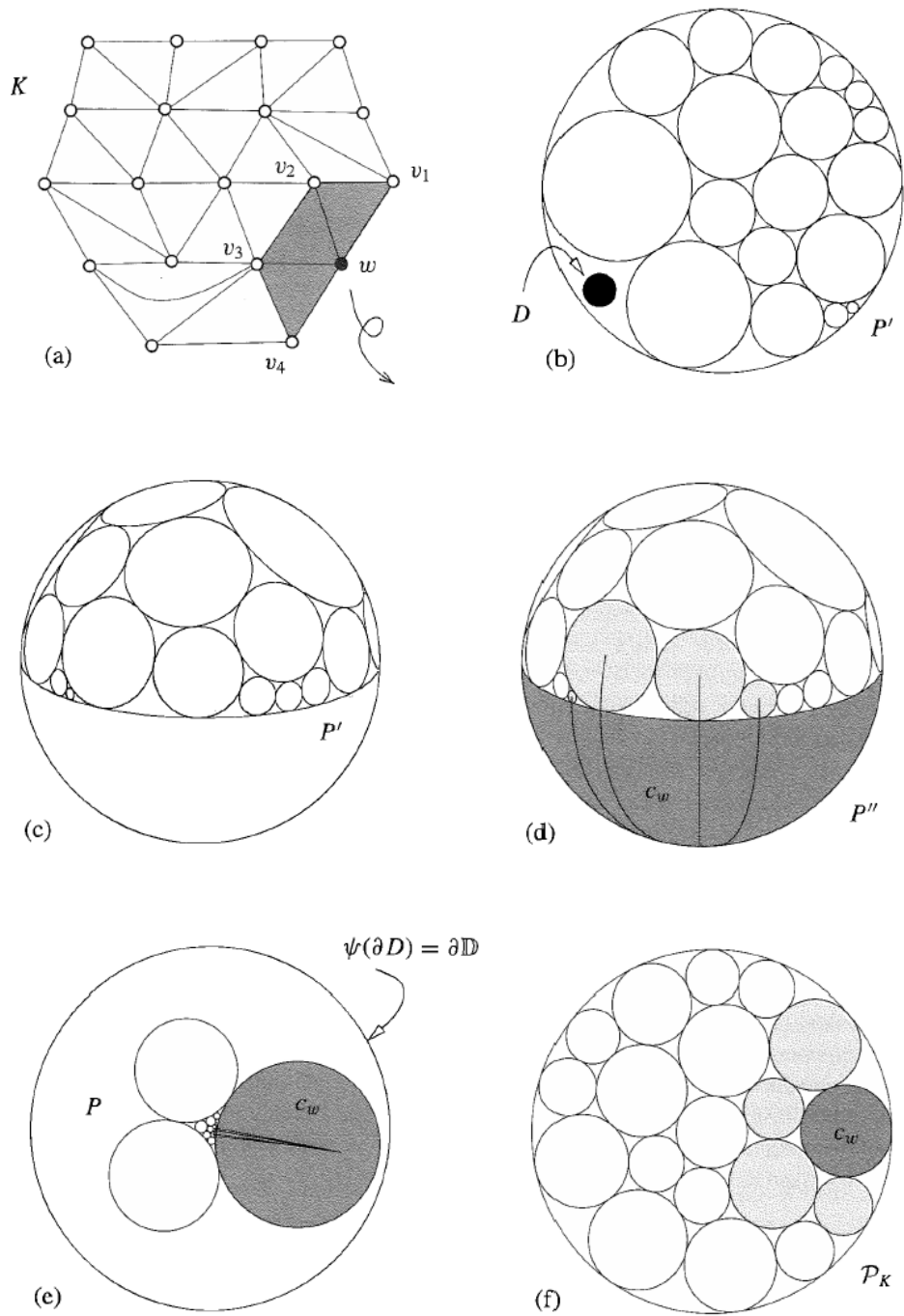
paraître un peu floue donc elle sera illustré avec un exemple à la fin de la démonstration. En enlevant à K l'étoile ouverte de w (c'est à dire en enlevant w et les arrêtes partant de w), on obtient un complexe K' qui triangularise un disque topologique fermé et qui a $V - 1$ sommets. L'hypothèse de récurrence nous donne l'existence d'un empilement de cercles non ramifié $P' = P_{K'}$ dont les cercles à la frontière sont des horocycles.

Les sommets des pétales de la fleur combinatoire de w $F_w = \{w; v_1, \dots, v_n\}$ deviennent des sommets à la frontière de K' donc leurs cercles associés sont des horocycles dans P' . Si on considère maintenant cette situation sur la sphère (via une projection stéréographique), on remarque qu'en incluant le cercle unité, la configuration $P'' = P' \cup \{\mathbf{T}\}$ forme un empilement de cercles non ramifié pour K sur la sphère. Ici \mathbf{T} est traité comme encerclant le complément de \mathbf{D} de sorte à ce qu'il puisse servir de cercle pour w ; les cercles v_1, \dots, v_n lui sont tous extérieurement tangents. On peut noter que tous les cercles à la frontière de P'_K sont tangents à \mathbf{T} dans \mathbf{P} ; ceux qui ne sont pas voisins à w ont une tangence étrangère à K .

Pour achever ce cas, nous devons ramener P'' dans le plan hyperbolique; cela peut être fait avec une transformation de Möbius approprié. Soit D un disque disjoint de $\text{carr}(P'')$. Il existe une transformation de Möbius Ψ qui envoie D sur l'hémisphère sud de \mathbf{P} , et ainsi $P = \Psi(P'')$ est un empilement de cercles pour K dans l'hémisphère nord. En d'autres termes P est dans le disque unité (toujours via une projection stéréographique) et l'on peut appliquer l'affirmation pour compléter la récurrence de ce deuxième cas.

Dans les deux cas nous avons prouvé l'existence de l'empilement P'_K ; achevant ainsi la récurrence; cela conclut la preuve de la proposition 4. \square

Pour voir les choses pas clairement, un exemple illustre la dernière. On prend K un disque combinatoire fermé à 19 sommets. Un sommet à la frontière w et les trois faces grisées sont enlevées, laissant un complexe réduit K' à 18 sommets. L'hypothèse de récurrence fournit l'empilement P' représenté en (b); les anciens voisins de w sont les quatre horocycles grisés. P' est stéréographiquement projeté sur la sphère en (c), et l'équateur est compris comme le cercles c_w dans (d). On remarque que dans P'' ; c_w est tangent à ses quatre voisins originaux, comme prescrit par les quatre arrêtes. Une application appropriée Ψ envoie D (illustré dans (b) mais caché dans (c) et (d)) sur l'hémisphère sud et transporte P'' sur l'empilement $P = \Psi(P'')$ dans \mathbf{D} . Les arrêtes dans (e) indiquent de nouveau la tangence de c_w avec ses voisins originaux, donc c'est un empilement de cercles pour K . Cela fournit l'empilement à partir duquel, par l'affirmation, on peut trouver un empilement maximal P_K illustré en (f).



Le lemme suivant est un corollaire direct de la preuve et justifie l'emploi du nom empilement "maximal".

Lemme 9 *Si K est un disque combinatoire fermé et R un étiquetage hyperbolique d'empilement pour K , alors $R \leq R_K$.*

6 Preuve pour la Sphère Combinatoire

Proposition 10 (*Théorème Koebe-Andreev-Thurston*). Soit K une sphère combinatoire. Alors il existe un empilement de cercles essentiellement unique injectif P_K pour K dans la sphère de Riemann \mathbf{P} .

Démonstration :

Soit v_∞ un sommet de K et soit $F = \{v_\infty; v_1, \dots, v_n\}$ sa fleur combinatoire. On supprime les faces associées dans K pour obtenir un complexe réduit K' . On vérifie facilement que K' est un disque combinatoire fermé. Par la proposition 4, il existe un empilement de cercles injectif P' pour K' dans \mathbf{D} dont les cercles à la frontière sont des horocycles. En projetant P' sur la sphère, on peut ajouter le cercle unité \mathbf{T} à la frontière de l'hémisphère sud pour former l'empilement injectif $P_K = P' \cup \mathbf{T}$. Les pétales v_1, \dots, v_n de F sont des sommets à la frontière de K' , donc leur cercles sont tangents à \mathbf{T} . Les arrêtes et les faces induites par cette tangence et le carrier de P' reconstituent la combinatoire originale de K . En d'autres termes, P_K est un empilement de cercles injectif pour K .

L'unicité se montre elle aussi facilement. Étant donné un autre empilement de cercles Q pour K , on peut supposer en appliquant une transformation de Möbius que le cercle pour v_∞ est l'hémisphère sud. Cela implique que la partie de Q associée au complexe réduit K' forme un empilement de cercles non ramifié dans l'hémisphère nord dont les cercles à la frontière sont tangents à l'équateur. En projetant dans le plan hyperbolique et en appliquant l'unicité essentielle de la proposition 4 on a que Q' et P' sont liés par un automorphisme de \mathbf{D} . Mais tout automorphisme de \mathbf{D} est la restriction d'une transformation de Möbius de \mathbf{P} qui envoie l'hémisphère sud sur lui même. Ainsi, Q et P_K sont liés par un automorphisme de \mathbf{P} et donc l'unicité essentielle de P_K est prouvée. \square

Cette partie là était particulièrement rapide. Historiquement, la sphère était le cadre initial des empilements de cercles et le résultat précédent a été montré indépendamment par Koebe, Andreev et Thurston. Ces différentes démonstrations sont toutes relativement sophistiquées et permettent d'apprécier l'efficacité de la démonstration via la géométrie hyperbolique. Cet argument est aussi efficace pour les modélisations numériques d'empilements sur des sphère. En effet, passer par le plan hyperbolique est à ce jour la seule méthode connue !

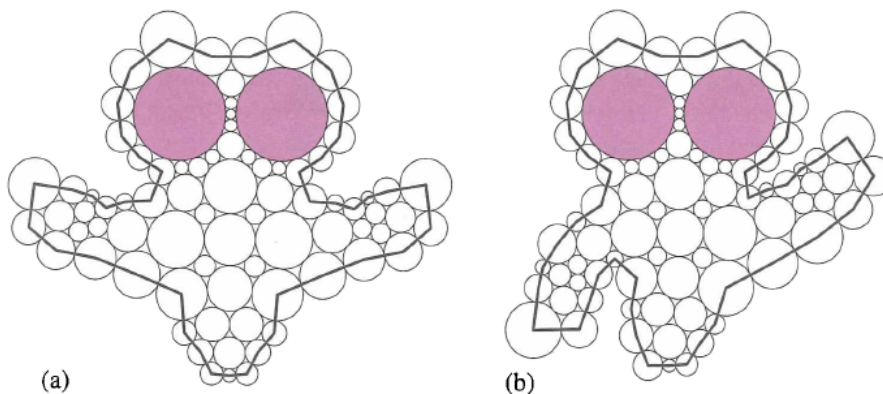
7 Ouverture vers la suite de la théorie et conclusion

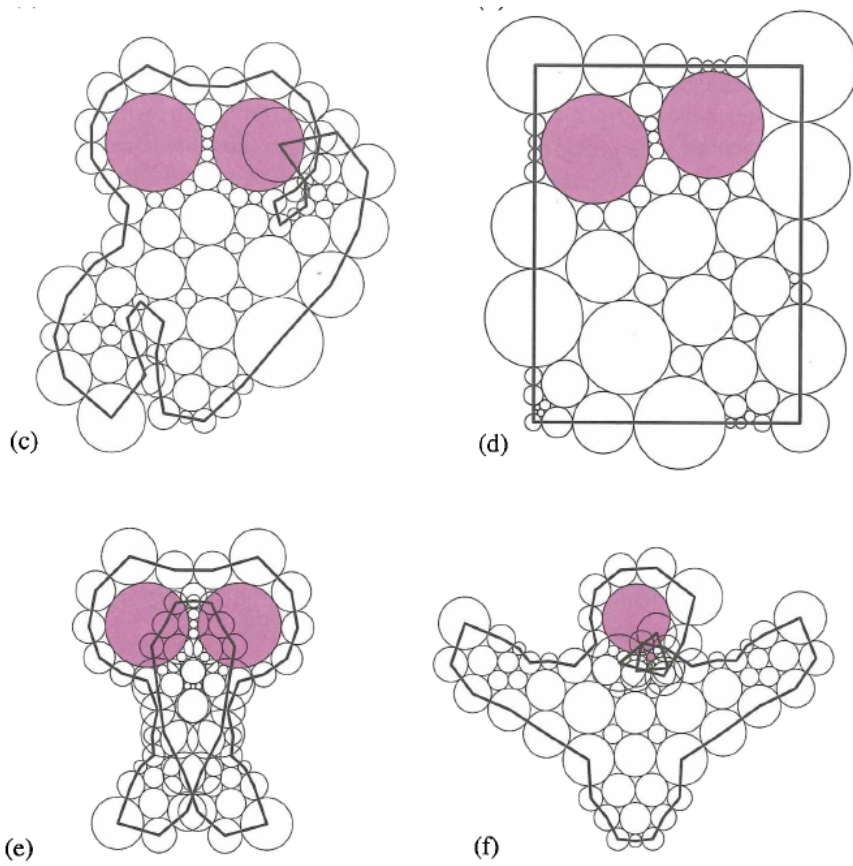
L'étape suivante aurait été la démonstration de cette propriété pour le cas d'un disque combinatoire ouvert : Soit K un disque combinatoire ouvert (donc infini, simplement connexe et sans frontière). Il existe un empilement de cercles non ramifié essentiellement unique P_K pour K dont le carrier remplit soit le plan hyperbolique \mathbf{D} soit le plan euclidien \mathbf{C} .

La preuve, plus complexe que dans les deux cas précédents ne sera pas faite ici.

7.1 Fonction analytique discrète et approximation

Les empilements maximaux ne sont que la partie émergée de l'iceberg. Comme l'illustre la figure suivante, pour une combinatoire fixée, le nombre d'empilements est infini et on peut étudier la flexibilité de la structure pour passer de l'un à l'autre. Deux sources de modifications possibles peuvent être les conditions au bord et la ramification en certains cercles. Voici par exemple un résultat valable dans les cadres euclidien et hyperbolique : étant donné des entiers positifs assignés aux sommets à la frontière de K , il existe un empilement de cercles essentiellement unique injectif pour K dont les cercles à la frontière ont ces nombres comme rayon. En d'autres termes, on peut résoudre des problèmes de valeurs à la frontière. D'autres contraintes peuvent exister en termes d'angles aux sommets à la frontière de K par exemple.

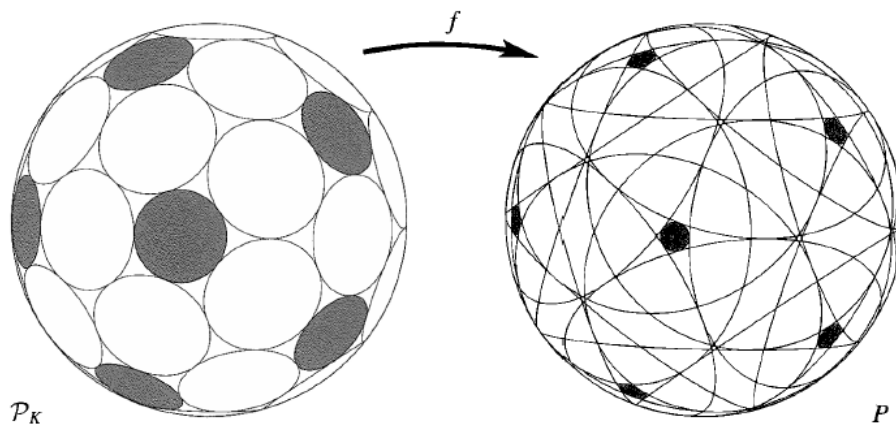




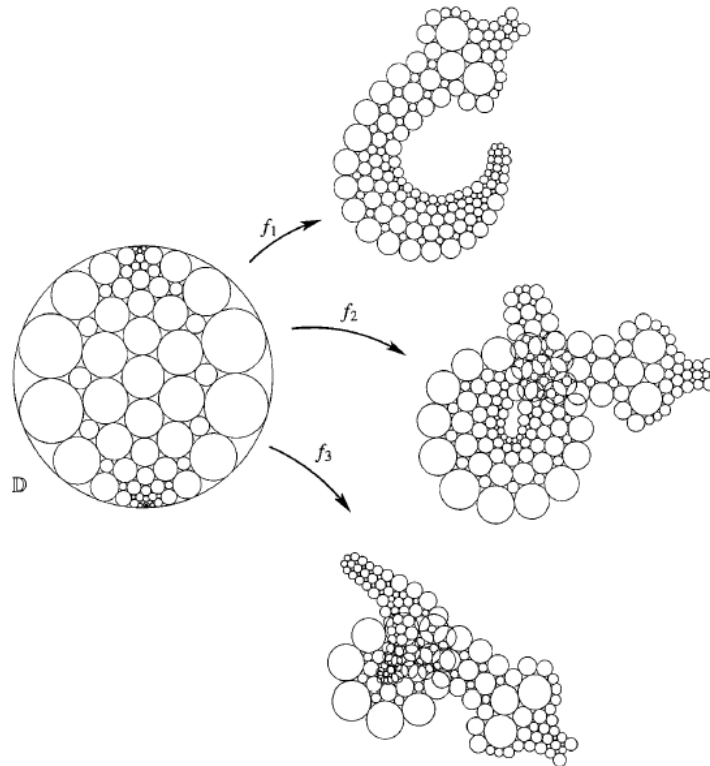
C'est cette compréhension de la dynamique des empilements possibles pour un complexe fixé qui va conduire à l'introduction d'application discrète :

Définition 13 Une *fonction analytique discrète* est une application $F : Q \rightarrow P$ entre empilements de cercles qui préserve la tangence et l'orientation.

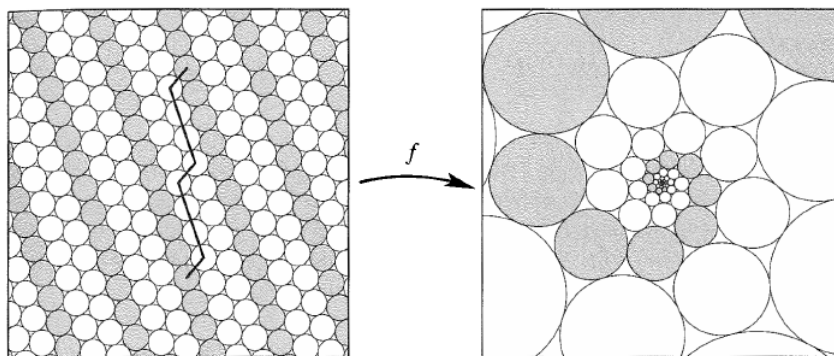
Voici quelques exemples de fonctions discrète.



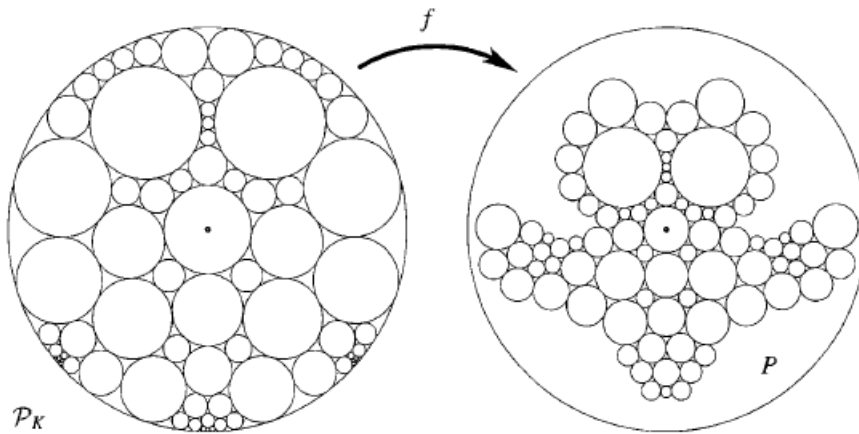
L'empilement maximal du théorème servira alors de domaine commun. Cette approche s'est avérée très riche : certaines propriétés de P se transposent à f et vice versa.



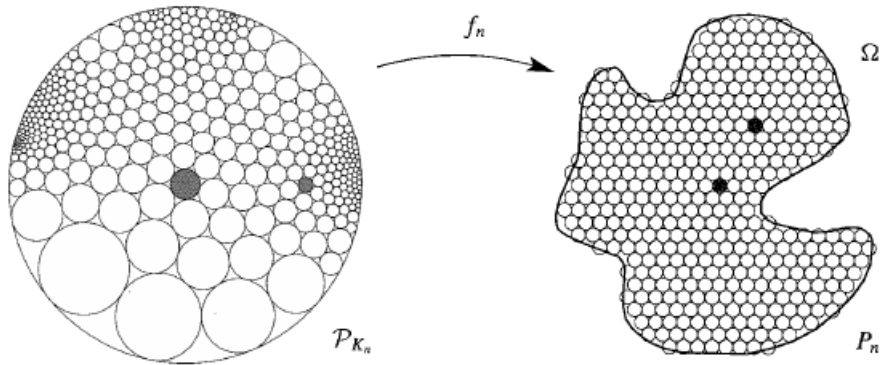
Un exemple de fonction exponentielle discrète dans le plan :

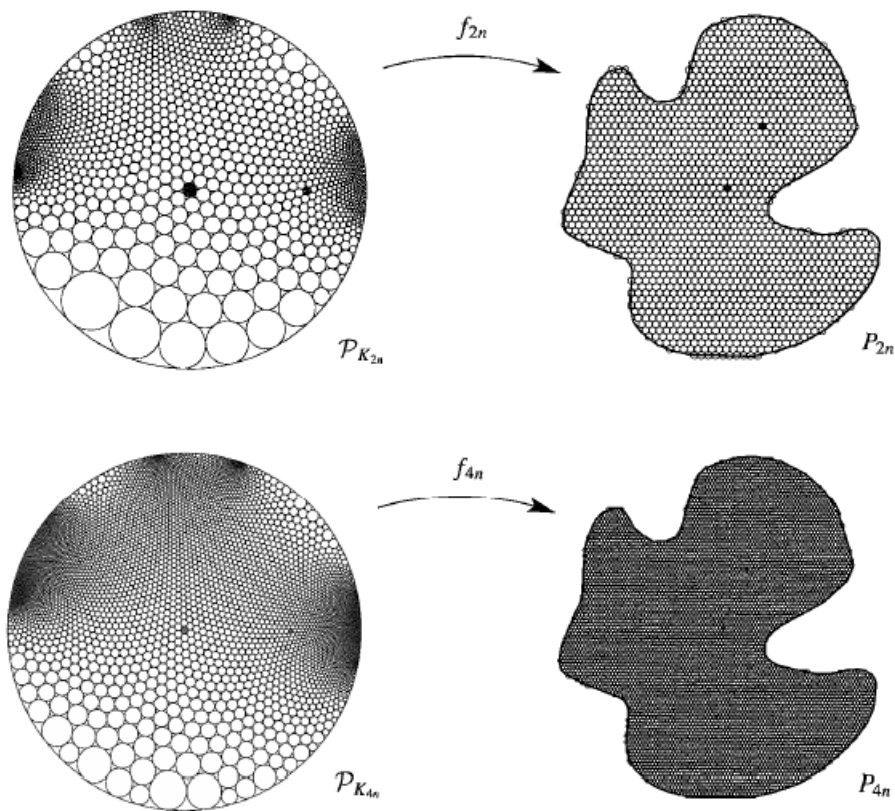


Pour donner un exemple précis du parallèle entre ce monde discret et le cadre classique, il existe, pour les fonctions du disque unité dans lui-même, un résultat analogue au lemme de Schwarz-Pick en analyse classique.



Enfin, les applications conformes discrètes approximent les applications conformes classiques. Étant donné un domaine simplement connexe du plan Ω , il existe une application conforme $F : D \rightarrow \Omega$ essentiellement unique. Si on pose un empilement de cercles hexagonal régulier dans le plan dont les rayons sont $1/n$ par exemple et qu'on utilise la frontière de Ω pour obtenir un empilement P_n , on peut considérer son complexe associé K_n et l'empilement maximal associé P_{K_n} dans \mathbf{D} . Thruston a conjecturé et Rodin et Sullivan ont prouvé que lorsque n tend vers l'infini, l'application conforme discrète $f_n : P_{K_n} \rightarrow P_n$ converge uniformément sur tout compact de \mathbf{D} vers l'application conforme classique F .





7.2 Conclusion

Le thème des empilements de cercles illustre à merveille la créativité que l'on peut trouver en mathématiques. A partir de cercles classiques, objets extrêmement simples et à priori étudiés sous toutes les coutures, s'ouvre un monde très visuel où la flexibilité et la rigidité de la géométrie et de la combinatoire sont en perpétuelle balance.

Le résultat démontré ici, à savoir l'existence et l'unicité d'empilements maximaux apporte déjà une certaine richesse au sujet. Mais là où il prend sa véritable profondeur, c'est dans les liens étroits qu'il entretient avec la théorie analytique classique. Les nombreuses questions qui restent ouvertes et les applications qui commencent à apparaître ici et là promettent un avenir intéressant pour ce domaine.

Bibliographie

Kenneth Stephenson, *Introduction to Circle Packing : The Theory of Discrete Analytic Functions*, Cambridge University Press, 2005.